QED 1–7

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

Bind 2

Fasit kapittel 2 – Geometri

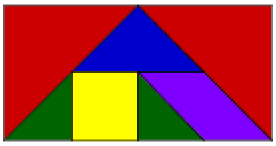
CAPPELEN DAMM
AKADEMISK

Kapittel 2

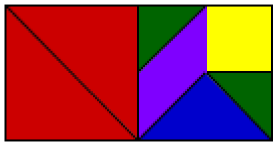
Kapittel 2.3

3. For eksempel:

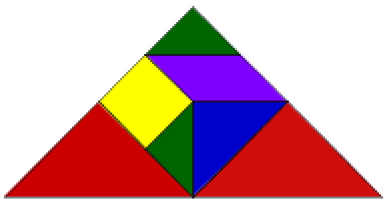
a)



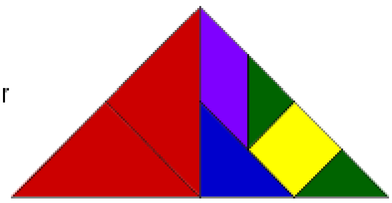
eller (se også e))



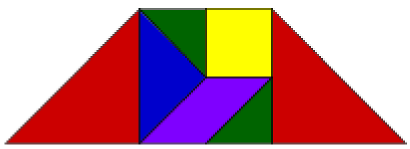
b)



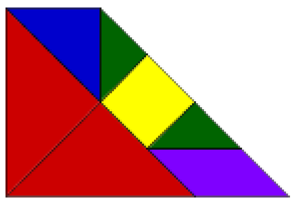
eller



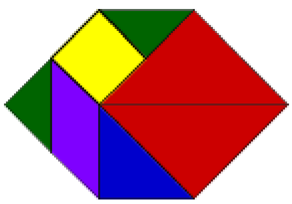
c)



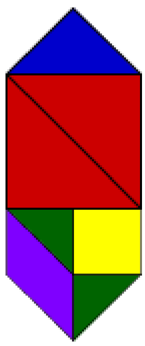
eller



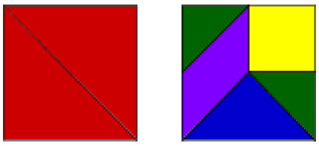
d)



eller

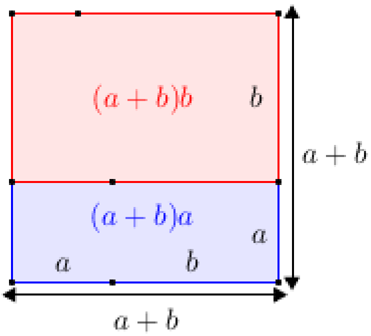


e)



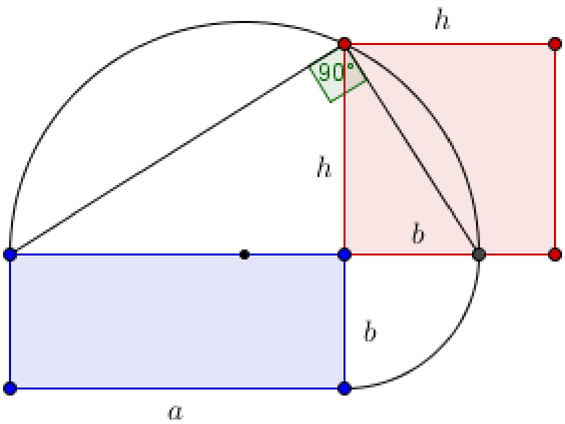
Kapittel 2.4

6.



7. Denne oppgaven kan det være greit å vente med til etter du har lest neste kapittel, eller om du kjenner Thales' setning fra før av.
Eller se nedenfor for en annen framgangsmåte.

Dersom sidene i rektanglet har lengde a og b, forleng f.eks. siden med lengde a, og sett av lengden b på det forlengede linjestykket (slik at du får et linjestykke med lengde $a+b$). Nå kan du bruke Thales' setning til å konstruere en rettvinklet trekant med den høyden du trenger (husk at du vil ha en høyde h med $h^2 = ab$, som er arealet av rektanglet).

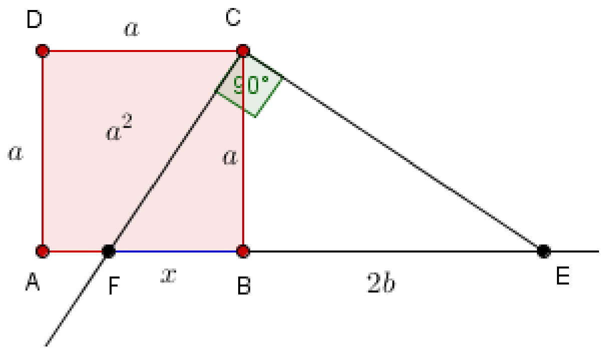


Alternativt: En del kvadratrøtter kan du konstruere i få steg ved å bruke Pytagoras' setning (rektanglet blir da ikke vilkårlig lenger). Bruk først samme framgangsmåte som over, dvs. konstruer et linjestykke med lengde $a+b$, og bruk katetsetningen til

å finne lengden til katetene i en rettvinklet trekant som har høyden du trenger (ved katetsetningen vet du at katetene må ha lengden lik kvadratroten av hhv. $(a+b)a$ og $(a+b)b$).
F.eks.: Prøv med $a = \frac{9}{2}$ cm og $b = 8$ cm. Da er $\sqrt{(a+b)a} = \frac{15}{2} = 7,5$ cm og $\sqrt{(a+b)b} = 10$ cm). Du kan anta at du får lov å måle opp $7,5$ cm og 10 cm med linjalen.

8. Bruk oppgave 7 (der du bruker Thales' setning) med f.eks. $a = 2$ cm og $b = 5$ cm.
Eller: Bruk framgangsmåten i oppgave 7 der du bruker konstruksjoner av $\sqrt{14}$ (med Pytagoras's setning: $1^2 + 3^2 = 10$ og $2^2 + 10 = 14$) og $\sqrt{35}$ (med Pytagoras' setning: $1^2 + 5^2 = 36$ og $3^2 + 26 = 35$) og katetsetningen i tillegg til høydesetningen.

9. Du har gitt et kvadrat med sidelengde lik a. Forleng en av sidene i kvadratet (her AB), og sett av lengden $2b$ på forlengelsen. Kall endepunktet for E (dvs. BE har lengde $2b$). Trekk linjestykket EC, og konstruer en rett vinkel i C på EC. Forleng vinkelbeinet til denne vinkelen slik at det skjærer forlengelsen til AB (skjæringspunktet ligger på AB eller på forlengelsen av AB til venstre). Kall skjæringspunktet for F og lengden til FB for x. Ved høydesetningen er da $2bx = a^2$.



Bemerkning: Du kan fortsette og konstruere et rektangel som har samme areal som kvadratet med sidelengde a. Hvordan?

10. Euklidsk geometri: 1 linje
Sfærisk geometri: Ei linje i sfærisk geometri er en storsirkel. En storsirkel ligger i et plan gjennom sfærens sentrum. Normalen til dette planet gjennom sentrum skjærer sfærens overflate i to punkter. Disse to punktene kan vi kalle for «polene» til storsirkelen. Gjennom disse to polene går det uendelig mange storsirkler som er ortogonale til den gitte storsirkelen vi startet med.
Gjennom alle andre punkter enn disse to polene går det nøyaktig en storsirkel som er vinkelrett på den gitte storsirkelen.

Som eksempel kan du tenke på en globus og på den på ekvatoren og Nordpolen eller Sydpolen:
Gjennom Nordpolen er det uendelig mange linjer som er vinkelrett på ekvatoren. (Alle meridianer er vinkelrette på ekvatoren. To «diametralt motsatte» meridianer danner en storsirkel.) Likedan for Sydpolen.
Gjennom et annet punkt enn Nord- eller Sydpolen finnes det 1 storsirkel som står vinkelrett på ekvatoren (ta meridianen gjennom dette punktet og en «diametralt motsatt» meridian).

11. Ja: Tenk på en globus f.eks. Enhver trekant begrenset av storsirklene som svarer til ekvatoren, og to vilkårlige meridianer; enhver meridian står vinkelrett på ekvatoren.
Ja: Trekanten som er begrenset av ekvatoren og to meridianer som står vinkelrett på hverandre (en slik trekant avgrenser $\frac{1}{8}$ av sfæren).
(Generelt: Start med en storsirkel og ta en «pol» som beskrevet i løsningen av oppgave 10. To storsirkler som danner en $90°$ vinkel seg imellom, danner en trekant med denne storsirkelen vi starter med. Alle vinkler i denne trekanten er $90°$. Hvert hjørne er «pol» til motstående side.)

12. Vinkelsummen i en firkant i elliptisk geometri: større enn $360°$.
Vinkelsummen i en firkant i hyperbolsk geometri: mindre enn $360°$.
Vinkelsummen i en n-kant i elliptisk geometri: større enn $(n-2)\cdot 180°$.
Vinkelsummen i en n-kant i hyperbolsk geometri: mindre enn $(n-2)\cdot 180°$.

Kapittel 2.5

13. Trekantene $\triangle ABD$ og $\triangle ACD$ er kongruente. Bruk dette videre.

14. Vinkelen mellom linjene er $90°$.

15. Hint: Se på noen trekanter som er kongruente.

16. Vinkel w forblir den samme når C beveger seg langs den oransje sirkelbuen. Legg merke til at sentralvinkelen som svarer til den oransje buen er lik $360° - u$, og w er halvparten så stor som $360° - u$.

22.
d) Du får en regulær sekskant: Alle sidene er like lange, og alle vinklene er like store (i e) ser du bl.a. likesidede trekanter).

23.
c) i) $135°$
ii) $|EF| = \sqrt{2} - 1$, $|FG| = \sqrt{2} - 1$
iii) Alle sidene er like lange, og alle vinkler er like store.

24. Hint: Bruk Thales' setning.

25. Hint: Bruk Pytagoras' setning.

26. Det samlede arealet til områdene A og B er lik trekantens areal.

Kapittel 2.6

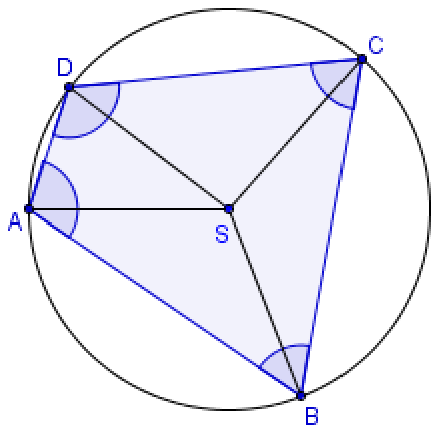
28. $15°$

29. $40°$

30.
a) De andre vinklene er lik $90°$ og $30°$.
b) Dette er mulig dersom en av sidene i trekanten er diameteren i sirkelen. Da er de andre vinklene lik $90°$ og $90° - v$.

31. Hint: Her kan du bruke periferivinkelsetningen.

32. Hint: Del opp i trekanter som vist i tegningen under.



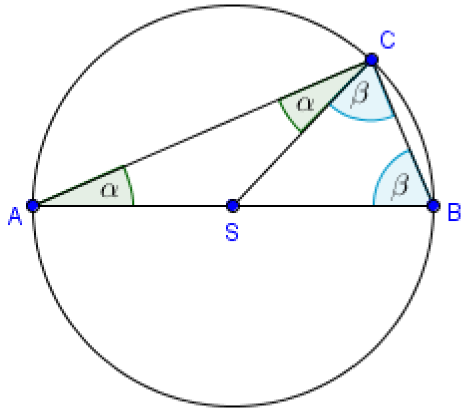
33. Tegn en sirkel med sentrum i B og radius $|AB|$. $\angle EAC$ er en periferivinkel over buen CE og er dermed lik halvparten så stor som sentralvinkelen over buen CE. Denne sentralvinkelen er $\angle CBE = 90°$, og dermed er $\angle EAC = 45°$.

34. Hvis AB og CD ikke hadde vært parallelle, så hadde vi fått et skjæringspunkt mellom linjene som er forlengelsene til AB og CD, som vi kaller for E, og dermed en trekant BDE som har en vinkelsum som er større enn $180°$.

35. Hint: Hvilke kongruente trekanter får du?

36. Sentralvinkelen som hører til periferivinkelen v er lik $s = 360° - \angle ASB$. (Se også oppgave 16.)
For beviset av periferivinkelsetningen i dette tilfellet kan du bruke en inndeling i trekanter som i oppgave 32.

37. Hint: Se på vinkelsummen i disse trekantene:



38.

a) u og v er periferivinkler over samme bue MM'.

b) Ved formlikhetssetningen VV.

c) Følger fra $\frac{|PM|}{|PN'|} = \frac{|PM'|}{|PN|}$.

39.

b)1. Samsvarende vinkler ved parallelle linjer.

2. Linja gjennom A og E halverer vinkel $\angle A$, så $\angle CAE = \angle AEC$ (her brukte vi også 1.).

3. Ved 1. og formlikhetssetningen VV.

4. Følger fra 2. og 3.

41.

Setning i): 1) Ved formlikhetssetningen VV (samsvarende vinkler ved parallelle linjer).

2) Følger fra 1).

Setning ii): 1) De to brøkene er likeverdige brøker.

2) Følger fra 1) og 2) (Fra 1): $|AB| = (k+1)|AD|$ og $|AC| = (k+1)|AE|$)

3) Følger fra 2).

4) Følger fra 3) (parvis like vinkler; se også oppg. 34).

Kapittel 2.7

44.

a) $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3}$

45. Volumet til enhver slik serviettring er lik volumet til ei kule med radius H (merk at volumet faktisk er uavhengig av radiusen i kula!). Volumet er altså lik $\frac{4}{3}\pi H^3$.

46. Hint: Vinkelsummen ved hvert hjørne er mindre enn $360°$, og det må møtes minst tre regulære mangekanter ved hvert hjørne.

47.

a)

	H	K	F
Tetraeder	4	6	4
Kube	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

b) Oppgavestillingen kan virke litt upresis. Formlene stemmer for de regulære polyedrene: Vi har likt antall kanter og hjørner i hver flate, og ved hver kant møtes det 2 flater.

Meningen var at man også skulle reflektere over om formlene stemmer for andre typer polyedre.

Formlene gjelder for de semiregulære polyedrene ved å tenke på at vi da tar summen av uttrykkene gitt ved disse formlene (f.eks. når vi ser på en avstumpet kube, ser vi på trekanter og åttekanter hver for seg, så tar vi summen av antall kanter (hhv. antall hjørner) vi kom fram til).

For polyedre som ikke har like hjørner (f.eks. en pyramide med kvadratisk grunnflate) må vi dele opp i de forskjellige hjørnene.

d) i) Ja. ii) Ja. iii) Ja.

e) Avstumpet kube: $H = 24$, $K = 36$, $F = 14$, $24 + 14 - 36 = 2$

Rombkuboktaeder: $H = 24$, $K = 48$, $F = 26$, $24 + 26 - 48 = 2$

Avstumpet ikosaeder: $H = 60$, $K = 90$, $F = 32$, $60 + 32 - 90 = 2$

f) $H = 12$, $K = 30$, $F = 12$. Eulers polyederformel gjelder ikke, polyederet er ikke konvekst.

48. (3 4 5 4)

49. (3 4 3 4)

50.

b) Kuboktaeder: 8 likesidede trekanter og 6 firkanter.

Avstumpet oktaeder: 6 kvadrater og 8 regulære sekskanter.

c) Kuboktaeder: (3 4 3 4)

Avstumpet oktaeder: (4 6 6)

51.

Her er det dessverre kommet feil figur i oppgaven. Det er oppgaveteksten vi skal forholde oss til, altså et avstumpet kuboktaeder. Hjørnesymbolet er (4 6 8); det er 6 regulære åttekanter, 8 regulære sekskanter og 12 kvadrater.

Kapittel 2.8

52.

a) Sammensetningen av to speilinger om to parallelle linjer er en parallellforskyvning med en vektor som er dobbelt så lang som avstanden mellom de to linjene.
I motsatt rekkefølge: Da får vi også en parallellforskyvning, men med en annen vektor enn før (hvilket forhold er det mellom denne vektoren og vektoren i den første sammensetningen, som er beskrevet over?).
Sammensetningen av to speilinger om ikke-parallelle linjer er en rotasjon om skjæringspunktet mellom de to linjene med en vinkel som er to ganger så stor som vinkelen mellom de to linjene (rotasjonen er mot klokka, og nevnte vinkel mellom linjene er målt mot klokka).
Sammensetning av speiling og rotasjon: Dette er en speiling dersom vi ser på symmetrier til en figur. Generelt: ingen kongruensavbildning.
b) i) Identiteten (det vi betegnet med R_{360}), figuren kommer tilbake til utgangsposisjonen.
ii) Parallellforskyvning (se a)).
iii) Rotasjon med en vinkel som er like stor som summen av de to vinklene.
iv) Rotasjon; senter: La oss først anta at ikke begge rotasjonsvinklene er lik 180°. La oss betegne resultatet av denne sammensetningen med trekant $A''B''C''$. Midtnormalene til linjestykkene AA'', BB'' og CC'' møtes i et punkt. Dette punktet er rotasjonssenteret; rotasjonsvinkelen er summen av de to rotasjonsvinklene. Et spesialtilfelle er sammensetninger av to rotasjoner (om forskjellige sentre) med 180°. Da er sammensetningen en parallellforskyvning der parallellforskyvningsvektoren har samme retning som vektoren mellom de to rotasjonssentrene og er to ganger så lang.

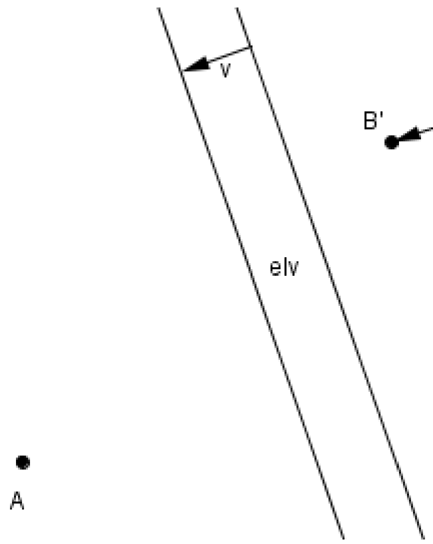
53. a) Trekk linjestykket fra A til A' (f.eks.). Midtnormalen til dette linjestykket er speilingslinja.
b) Se a): Prøv om D er speilbildet til A, E speilbildet til B og F speilbildet til C. Trekk linjestykkene AD, BE, CF, og finn midtpunktene til disse linjestykkene. Dersom disse tre midtpunktene ligger på ei linje, så er trekant DEF en speiling av trekant ABC, og du har også funnet speillinja. Hvis ikke disse tre punktene ligger på linje, så prøv f.eks. om E er speilbildet til A, D speilbildet til B, F speilbildet til C osv. Fortsett.

54. Trekk linjestykkene AA' og BB', og konstruer midtnormalene på disse to linjestykkene. Skjæringspunktet til de to midtnormalene er rotasjonssenteret S (midtnormalen til CC' går også gjennom S). Rotasjonsvinkelen er lik $\angle A'SA$.

55. Forskyvningsvektoren er lik vektoren fra A til A'.

56. Hint: Speil punkt S om linja b. Hva er den korteste veien mellom H og S' (som er speilbildet til S)?

57. Hint: Parallellforskyv B en gang med vektoren $\mathbf{v}$, som er så lang som elven er bred (er altså ortogonal til elvebreddene). Hva er den korteste veien fra A til B'?



58. Merk: Her forutsetter vi at skriver bokstavene slik at de blir symmetriske slik som vi beskriver (f.eks. bokstavene K og Λ). Alle figurer har rotasjonssymmetrien R_{360}, så den nevnes ikke eksplisitt i denne oppgaven.

a) Kun speilsymmetri om ei vertikal linje: A, M, T, U, V, W, Y, Å

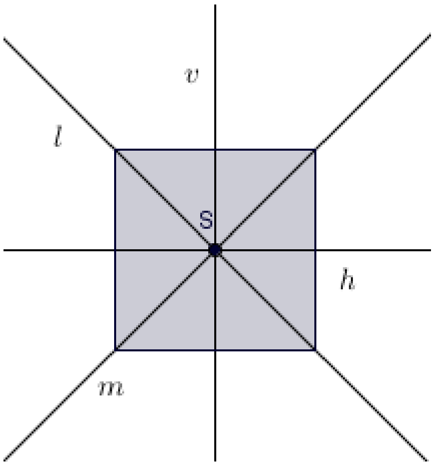
Kun speilsymmetri om ei horisontal linje: B, C, D, E, K
Kun rotasjonssymmetri med 180°: N, S, Z
Speilsymmetri om ei vertikal linje og om ei horisontal linje og rotasjonssymmetri med 180°: H, I, X
To speilsymmetrier og rotasjonssymmetri med 180°: Ø
Uendelig mange speilsymmetrier og rotasjonssymmetrier: O
Ingen symmetrier (kun identitetsavbildningen, dvs. R_{360}): F, G, J, L, P, Q, R, Æ

b) $\triangle$: 3 speilsymmetrier (om midtnormalene), 2 rotasjonssymmetrier (med 120° og 240°); disse er symmetrier som for en likesidet trekant
Θ og Φ: 2 speilsymmetrier (horisontal og vertikal), 1 rotasjonssymmetri (med 180°)
Λ, Π, Ψ og Ω: 1 vertikal speilsymmetri
Σ: 1 horisontal speilsymmetri

59. Alle de fire båndmønstrene har parallellforskyvningssymmetri, speilsymmetri om vertikale linjer, rotasjonssymmetri med 180° og glidespeilingssymmetri.

62.
Mønstrene er av følgende typer (se notasjonen på s. 270 i boka):
a) p4m
b) p6m
c) p6m
d) p6m
e) p4m
f) p6m
g) p6m
h) p6m
i) cmm
j) p4g
k) p6

66.



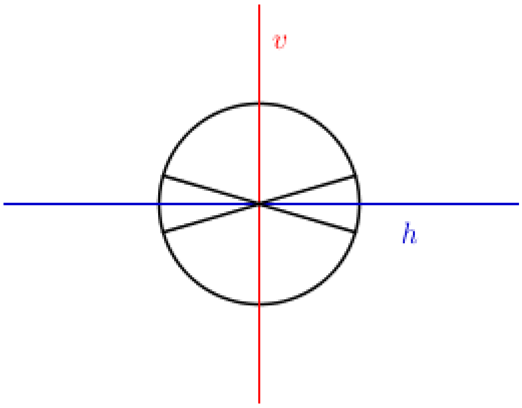
Fire speilsymmetrier: S_h, S_v, S_l, S_m

Fire rotasjonssymmetrier (om S): R_{360}, R_{90}, R_{180}, R_{270}

Sammensetningstabell:

	R_{360}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	S_h	S_v	S_l	S_m
R_{360}	R_{360}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	S_h	S_v	S_l	S_m
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_{360}	S_l	S_m	S_v	S_h
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_{360}	R_{90}	S_v	S_h	S_m	S_l
R_{270}	R_{270}	R_{360}	R_{90}	R_{180}	S_m	S_l	S_h	S_v
S_h	S_h	S_m	S_v	S_l	R_{360}	R_{180}	R_{270}	R_{90}
S_v	S_v	S_l	S_h	S_m	R_{180}	R_{360}	R_{90}	R_{270}
S_l	S_l	S_h	S_m	S_v	R_{90}	R_{270}	R_{360}	R_{180}
S_m	S_m	S_v	S_l	S_h	R_{270}	R_{90}	R_{180}	R_{360}

67.



To speilsymmetrier: S_h og S_v

To rotasjonssymmetrier: R_{180} og R_{360}

Sammensetningstabell:

	R_{360}	R_{180}	S_h	S_v
R_{360}	R_{360}	R_{180}	S_h	S_v
R_{180}	R_{180}	R_{360}	S_v	S_h
S_h	S_h	S_v	R_{360}	R_{180}
S_v	S_v	S_h	R_{180}	R_{360}

68.
a) F.eks. bokstaven A, hjertet som vi så i kapitlet.
b) F.eks. et kvadrat.
c) Umulig. Sammensetning av to forskjellige speilsymmetrier gir en rotasjonssymmetri forskjellig fra R_{360}.
d) Umulig. En figur med tre speilsymmetrier har tre rotasjonssymmetrier (inkl. R_{360}).

Kapittel 2.9

69.
a) $\angle A = 56,6°$, $|BC| \approx 6,67$ cm, $|AC| = 7,99$ cm
b) $|AC| \approx 6,04$ dm, $\angle A \approx 34,17°$, $\angle B \approx 55,83°$
c) $\angle B = 75,7°$, $|AB| \approx 2,32$ mm, $|AC| \approx 9,11$ mm.

70. Bygningen er omtrent $24,62$ m høy.

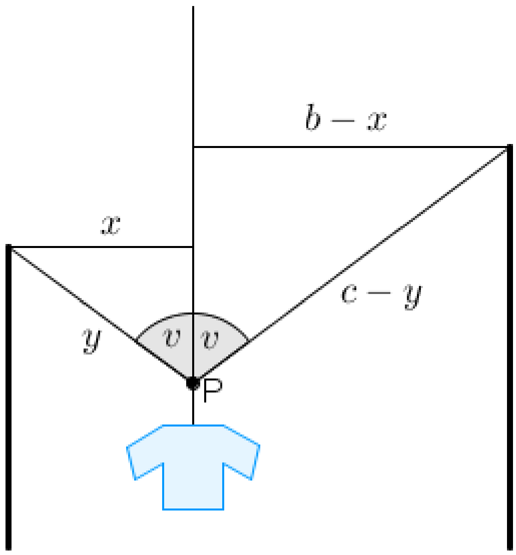
71. $h = 18\,\text{cm}$

72. $\angle A \approx 41,41°$, $\angle B \approx 55,77°$, $\angle C \approx 82,82°$

73.
a) $\angle B = 68°$, $|AB| \approx 3,09$ cm, $|BC| \approx 5,25$ cm
b) $|AB| \approx 63,5$ mm, $\angle A \approx 79,1°$, $\angle B \approx 40,9°$
c) $\angle A \approx 30,38°$, $\angle B \approx 66,59°$, $\angle C \approx 83,03°$
d) $\angle A \approx 64,05°$, $\angle B \approx 23,45°$, $|AC| \approx 27,88$ mm

74.

a) La x betegne avstanden fra venstre stolpe til punktet der klesplagget henger (horisontalt, se tegning under). Da er avstanden fra punktet der klesplagget henger til høyre stolpe lik $b-x$. La også y betegne lengden til klessnora fra venstre stolpe (toppen av venstre stolpe) til P (se tegning under). Da er $c-y$ lengden til klessnora fra P til høyre stolpe.



Per definisjon er $\sin(v) = \frac{x}{y}$, men også $\sin(v) = \frac{b-x}{c-y}$. Ut fra dette følger det at $\frac{x}{y} = \frac{b}{c}$.

b) P er i høyde $\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{11}}{2}\,\text{m} \approx 0,59\,\text{m}$ og i avstand $\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{44}\,\text{m} \approx 2,12\,\text{m}$ fra venstre stolpe.

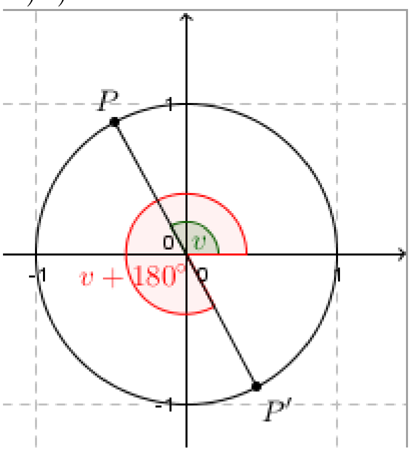
75.

a) $|AC| = \frac{\sin(120°)}{\sin(30°)}\,\text{cm} \approx 1,73\,\text{cm}$, $|AD| = \sqrt{1,73^2+1}\,\text{cm} \approx 2\,\text{cm}$

b) $|AG| = \frac{\sin(30°)}{\sin(90°)}\,\text{cm} = 0,5\,\text{cm}$, $|AH| = \frac{\sin(30°)}{\sin(120°)}\,\text{cm} \approx 0,58\,\text{cm}$, $|GH| \approx 0,29\,\text{cm}$, $|BG| = \sqrt{1^2 - 0,5^2}\,\text{cm} \approx 0,87\,\text{cm}$

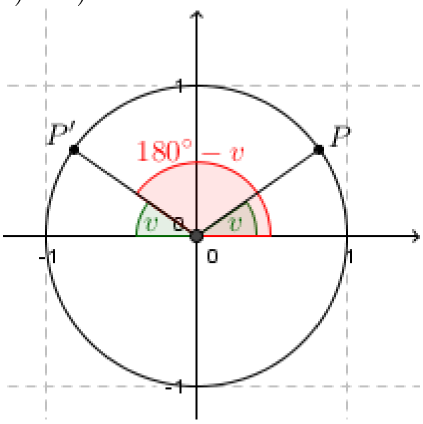
76.

a)+b) i)



Å addere 180° til en vinkel v svarer til rotasjon av det tilsvarende punktet på enhetssirkelen om origo med 180°; både x- og y-koordinaten skifter da fortegn.

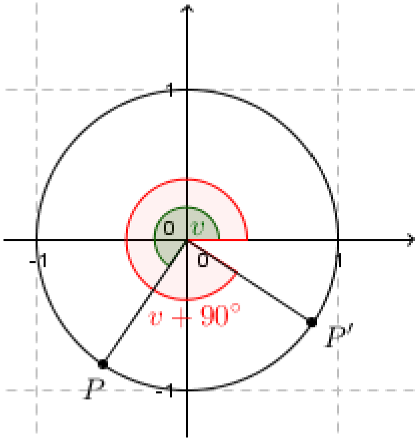
b) ii)+iii)



y-koordinaten forblir den samme, x-koordinaten skifter fortegn.

iv) Bruk ii)+iii): $\tan(180° - v) = \frac{\sin(180° - v)}{\cos(180° - v)} = -\frac{\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v)$

c) i)+ii)



Å addere 90° til en vinkel v svarer til rotasjon av det tilsvarende punktet på enhetssirkelen om origo med 90° (mot klokka). x-koordinaten til punktet P' er da lik den negative y-koordinaten til punktet P, og y-koordinaten til P' er x-koordinaten til P.

d)

v i grader	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
v i radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(v)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(v)$	1	$\sqrt{32}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(v)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	udefinert	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

v i grader	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
v i radianer	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$\sin(v)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	
$\cos(v)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\tan(v)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	udefinert	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

77. Bruk at $\tan(90° - v) = \frac{\sin(90° - v)}{\cos(90° - v)}$ og oppgave 76 c).

78.

For sinus og cosinus kan vi f.eks. se dette ved enhetssirkelen.

Sinus er negativ for vinkler mellom 180° og 360°.

Cosinus er negativ for vinkler mellom 90° og 270°.

Tangens er negativ for vinkler mellom 90° og 180° og for vinkler mellom 270° og 360°.

79. $\cos(u) \approx -0,95$

80.
Sidelengden i kvadratet er lik $\sqrt{\frac{25}{2}}\,\text{cm} = \frac{5}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$.
Høyden i pyramiden er lik $h = \sqrt{\frac{299}{4}}\,\text{cm} = \frac{\sqrt{299}}{2}\,\text{cm}$.
$\angle ACP = \cos^{-1}(\frac{5}{18}) \approx 73,87^\circ$
$\angle CPS \approx 90^\circ - 73,87^\circ = 16,13^\circ$

81.
a) Avrundet $15,48\,\text{cm}^2$.
b) Avrundet $41,57\,\text{cm}^2$.

82. Avrundet $7,14\,\text{cm}^2$.

83.
a) $\sqrt{109}$ cm
b) Avrundet $15,16\,\text{cm}^2$.

84. Avrundet $12,65\,\text{cm}^2$.

85.
a) Avrundet $6,42\,\text{km}^2$.
b) Avrundet $25,67\,\text{km}^2$ (fire ganger arealet i a)).

86.
a) Ved Pytagoras' setning.
b) Fra a).
c) Fra b): Bruk 2. kvadratsetning og trekk sammen.
d) Per definisjon av cosinus.

87.
a) Ved Pytagoras' setning.
b) Bruk a) og regn ut.
c) Bruk at $\cos(180^\circ - \gamma) = \frac{d}{a}$ per definisjon.

88. Bruk at $\cos^{-1}(0) = 90^\circ$.

Kapittel 2.10

89.

a) $\mathbf{a} = [6, 14]$, $\mathbf{b} = [-4, -2]$, $\mathbf{c} = [2, 12]$, $\mathbf{d} = [-15, -24]$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{37}$

b) $\mathbf{a} = [\frac{1}{2}, -2]$, $\mathbf{b} = [-\frac{9}{2}, -4]$, $\mathbf{c} = [-4, 2]$, $\mathbf{d} = [-\frac{15}{2}, 9]$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{5}$

c) $\mathbf{a} = [3, -5]$, $\mathbf{b} = [-3, -5]$, $\mathbf{c} = [0, -10]$, $\mathbf{d} = [9, 0]$, $|\mathbf{u}| = 5$

90.

Du får først vektorene $a = [3, 7]$ og $b = [-1, 5]$ med startpunkt i origo, og så vektoren $a + b$.

91.

b) Vektoren som er summen av vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ med startpunkt i origo.

c) Kan du danne en trekant med vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$?

Vi kan parallellforskyve (flytte) vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ slik at $\mathbf{u}$ starter ved C og $\mathbf{v}$ starter ved endepunktet til $\mathbf{u}$. Da kan vi se at summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ danner en trekant sammen med $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ slik de er flyttet nå.

(Bemerkning: Vi kunne også formulere oppgaven slik at du skal velge A som startpunkt for $\mathbf{w}$. Da kan du se en sammenheng til oppgave 105.)

92.

b) Vektoren som er differansen $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ med startpunkt i origo.

c) Vektoren $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ beskriver den siste siden i trekanten ABC. Vi kan også formulere det på den måten at det er den korteste diagonalen i parallellogrammet beskrevet av vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

93.

a) $\overrightarrow{AB} = [1, -1]$, $\overrightarrow{BA} = [-1, 1]$

b) $\overrightarrow{AB} = [-3, 0]$, $\overrightarrow{BA} = [3, 0]$

c) $\overrightarrow{AB} = [-7, 1]$, $\overrightarrow{BA} = [7, -1]$

Generelt: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

94.

a) Nei.

b) Ja; $\mathbf{w} = -18\mathbf{v}$.

c) Nei.

95.

a) Vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er parallelle.

b) Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er parallelle (når a er forskjellig fra 0).

c) Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er parallelle (når a, b og c alle er forskjellige fra 0).

d) Dersom $\mathbf{u}$ er en gitt vektor, så er alle vektorene på formen $c \cdot \mathbf{u}$, der c er et reelt tall forskjellig fra 0, parallelle til $\mathbf{u}$.

96.

a) Vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lik $90°$.

b) Vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lik $90°$.

c) Her skal du finne uendelig mange verdier for a og b («i teorien», glidere i GeoGebra vil ikke tillate uendelig mange tall i intervallet $[-10, 10]$). F.eks. $a = 1$, $b = -1$ og $a = -5$ og $b = 5$. Poenget er at for vilkårlig a og $b = -a$, så er vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lik $90°$.

d) Også her er det «i teorien» uendelig mange muligheter. F.eks. $a = 2$, $b = -5$, $c = 5$ og $d = 2$.

e) To vektorer $[a, b]$ og $[c, d]$ står normalt på hverandre hvis og bare hvis $c = t \cdot b$ og $d = -t \cdot a$, der t er et vilkårlig reelt tall.

97.

a) 6

b) -23

98. Dersom $\mathbf{v} = [a, b]$ for vilkårlige reelle tall a og b, og $\mathbf{w} = [tb, -ta]$, så er skalarproduktet $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = atb - bta = 0$. Det motsatte gjelder også.

99. $\overrightarrow{AB} = [4, -6]$. Eksempler på to vektorer som er parallelle med $\overrightarrow{AB}$: $[2, -3]$ og $[-8, 12]$. Vinkelen mellom to parallelle vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lik $0°$, skalarproduktet er dermed lik $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$.

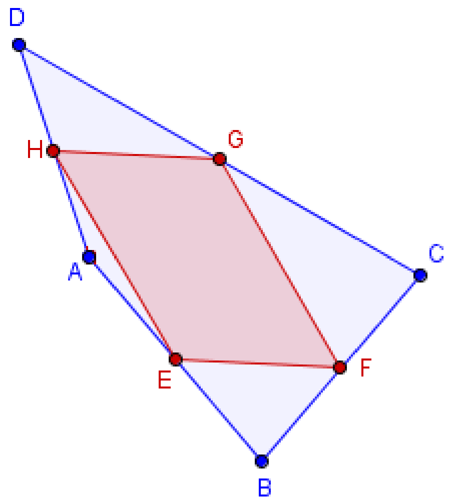
Eksempler på to vektorer som er ortogonale til $\overrightarrow{AB}$: $[3, 2]$, $[-12, -8]$.

100. a) Ja, skalarproduktet er lik 0.
b) Nei, skalarproduktet er lik -1.

101.
a) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{5\sqrt{13}}\right) \approx 70,56°$
b) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

103.
a) Første rad, første figur: trapes. Sidene er beskrevet ved vektorene $[3,0]$, $[2,-2]$, $[-6,0]$ og $[1,2]$ (her fulgte vi «veien» rekkefølgen til punktene ga oss; ellers er også motsatte fortegn mulige). Diagonalene kan f.eks. beskrives ved vektorene $[4,2]$ og $[5,-2]$.
Første rad, andre figur: kvadrat. Sidene er beskrevet ved vektorene $[3,-2]$, $[2,3]$, $[-3,2]$ og $[-2,-3]$. Diagonalene kan f.eks. beskrives ved vektorene $[-1,5]$ og $[5,1]$.
Andre rad, første figur: parallellogram. Sidene er beskrevet ved vektorene $[1,3]$, $[4,1]$, $[-1,-3]$ og $[-4,-1]$. Diagonalene kan f.eks. beskrives ved vektorene $[5,4]$ og $[3,-2]$.
Andre rad, andre figur: pentagram (femstjerne). Sidene er beskrevet ved vektorene $[0,-6]$, $[-4,5]$, $[6,-2]$, $[-6,-2]$ og $[4,5]$.
b) Her skal sidene beskrives ved vektorer (eller gjerne også diagonalene når det dreier seg om firkanter f.eks.).

104.
a) Den «nye» firkanten er et parallellogram.



b) Vi kan bruke vektorer her: Koordinatene til midtpunktene er gitt på følgende måte: E har koordinatene til vektoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, F har koordinatene til vektoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G har koordinatene til vektoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, og H har koordinatene til vektoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$. Siden EF kan dermed beskrives ved vektoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Og siden HG kan beskrives ved vektoren $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Vi ser at sidene EF og HG er beskrevet ved de samme vektorene, og de er dermed parallelle.
På liknende måte får vi at sidene FG og EH er parallelle.

105. La oss betegne vektorene som gir de ikke-parallelle sidene i parallellogrammet med $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Da kan den lengste diagonalen uttrykkes som summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og den korteste diagonalen som $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (se også oppgave 91 og oppgave 92).

106. Båtens posisjon etter t timer er $(3, 7) + \frac{11t}{13} \cdot (5, 12) = (3 + \frac{55t}{13}, 7 + \frac{132t}{13})$.

107. b) $C' = (2.5, -5)$

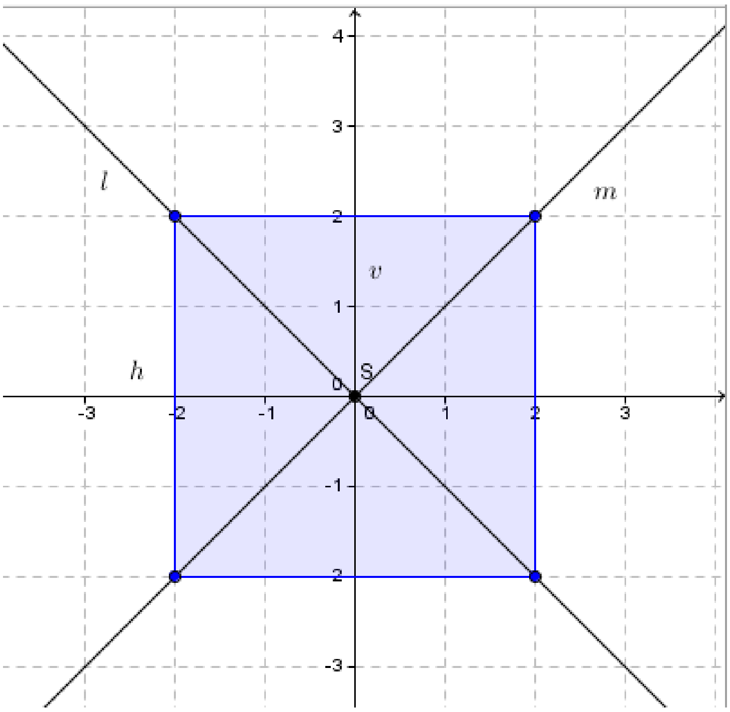
108.
a) $S(x, y) = (10 - x, y)$
b) $S(x, y) = (x, 12 - y)$

109.
a) $F(x, y) = (-x, -y)$. Rotasjon om origo med $180°$. Får det samme når vi utfører de to speilingene i motsatt rekkefølge.
b) $F(x, y) = (-x, y)$. Speiling om y-aksen. I motsatt rekkefølge: $F(x, y) = (x, -y)$. Speiling om x-aksen.

110. Speiling om linja $y = x$.

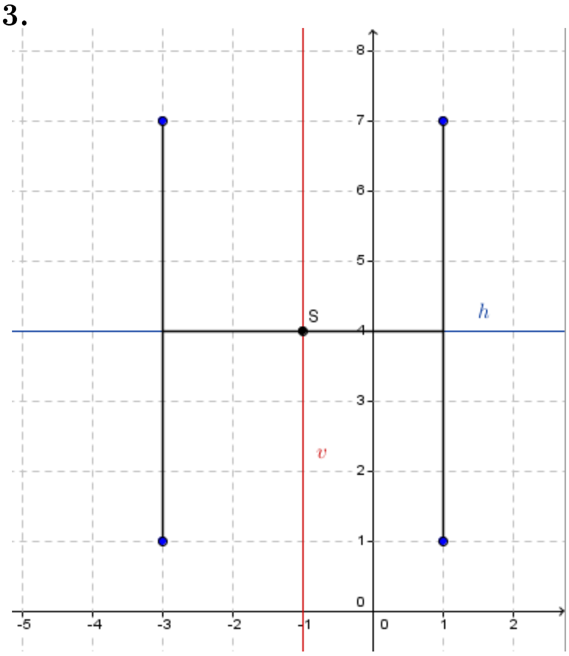
111. Speilingslinja er den vertikale linja $x = 1,5$, parallellforskyvningsvektoren er $[0, 5]$.

112.



4 speilsymmetrier: $S_h(x,y) = (x,-y)$, $S_v(x,y) = (-x,y)$, $S_l(x,y) = (-y,-x)$, $S_m(x,y) = (y,x)$
4 rotasjonssymmetrier (om S): $R_{360}(x,y) = (x,y)$, $R_{90}(x,y) = (-y,x)$, $R_{180}(x,y) = (-x,-y)$, $R_{270}(x,y) = (y,-x)$

113.



To speilsymmetrier: $S_h(x,y) = (x, 8-y)$, $S_v(x,y) = (-2-x, y)$
To rotasjonssymmetrier (om S): $R_{360}(x,y) = (x,y)$, $R_{180}(x,y) = (-2-x, 8-y)$

114. $(-1, \frac{5}{3})$

Kapittel 2.11

115.
a) Alle typer trekanter (vinkelsummen i enhver trekant er lik 180°; vi kan lage en tesselering der vi finner igjen hver vinkel i trekanten nøyaktig to ganger ved hvert hjørne).

b) Alle typer firkanter tesselerer (vinkelsummen i enhver firkant er lik 360°).

116. Kan bruke regulære trekanter, firkanter og sekskanter.
En regulær mangekant tesselerer hvis og bare hvis verdien til den indre vinkelen er en faktor i 360.

117.
a) (3 12 12)

b) (3 6 3 6)

118. Hjørnesymbolene til tesseleringene er: (4 8 8), (3 4 3 3 4) og (3 3 3 3 6)

119. Vinkelsummen ved hvert hjørne er lik 360°. De fire forksjellige hjørnene i firkanten møtes i ett hjørne i tesseleringen. Vinkelsummen i en firkant er dermed lik 360°.

120.
Mønstrene er av følgende typer (se notasjonen på s. 270 i boka):
a) p1
b) cmm
c) p6m

122.
Mønstrene er av følgende typer (se notasjonen på s. 270 i boka):
a) p4m
b) cm
c) pmm

124.
For eksempel:
a) Begynte med et rektangel (som vi fortsatt ser i tegningen), brukte parallellforskyvning og glidespeiling før figuren ble fargelagt.
b) Begynte med et rektangel, brukte rotasjon (med 180°) og glidespeiling før figuren ble fargelagt.
c) Begynte med en regulær sekskant (som vi fortsatt kan skimte i tegningen), brukte rotasjon (med 120°) før figuren ble fargelagt.
d) Begynte med et parallellogram, brukte rotasjon (med 180°) og parallellforskyvning før figuren ble fargelagt.

129.
a) $\frac{\sqrt{5}}{2}x$

b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$

d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$

130. $c = \sqrt{2}a$, $d = \sqrt{2}b$. Dermed er $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, som er lik det gylne snitt.

131. Skal være tilnærmet lik det gylne snitt ($\approx 1,618$). Ser i oppgave 132 at det er nøyaktig lik det gylne snitt (men måleunøyaktigheter forekommer.)

132.
a) $3 \cdot 180° = 540°$

b) $\frac{540°}{5} = 108°$

c) $\angle CAB = 36°$

d) $\angle DAC = 36°$

e) Trekanten OBC er likebeint.

f) Trekanten ABO er likebeint med $\angle O = 108°$. Likheten $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$ følger f.eks. av at trekantene ABO og BEA er formlike. Ut fra denne likheten følger det direkte at forholdet mellom diagonallengde og sidelengde i en regulær femkant er lik det gylne snitt.

133. 5. Alle sidene er like lange og alle vinkler er like store.

134.
b) 72°, 72°, 36°

135. $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$

136.
a) Forholdet er avrundet tilnærmet lik det gylne snitt.
b) Når vi har regnet ut forholdet $\frac{a}{b}$ og tar den inverse verdien (altså 1 delt på denne verdien), så oppdager vi at vi får tilnærmet det gylne snitt. Det betyr at forholdet $\frac{b}{a}$ er tilnærmet lik det gylne snitt.
Det samme for $\frac{b}{c}$.

139. Forholdet er avrundet tilnærmet lik det gylne snitt.

140. Forholdet er avrundet tilnærmet lik det gylne snitt.